



TITLE:

# 弾塑性構造物における非対称分岐現象について (有限要素法の基礎理論 III)

AUTHOR(S):

中村, 恒善; 上谷, 宏二

---

CITATION:

中村, 恒善 ...[et al]. 弾塑性構造物における非対称分岐現象について (有限要素法の基礎理論 III). 数理解析研究所講究録 1978, 329: 25-54

ISSUE DATE:

1978-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104134>

RIGHT:

## 弾塑性構造物における非対称分岐現象について

京大 建築 中村恒善

京大 建築 上谷宏二

## 1. 序文

弾塑性体の屈曲現象に関する一般理論としては, Hill [1], Hutchinson [2], Sewell [3] 等の研究がある。しかし, 弾塑性体の応力-歪関係は履歴に依存するので, 弾性体の場合のようなポテンシャル関数が定義できず, 履歴に依存した「場合分け」を基本とする数式表現が不可避免的に要求される。主として以上の理由により, 弾塑性体の屈曲現象の研究の殆んどは各論的であり, 弾性体における発展, 整備された一般理論の観点からは, それに比すべき一般理論は少ない。弾塑性体の挙動解析では領域ごとに異なる応力及び歪の履歴をすべて記憶しながら挙動を追跡しなければならぬ必要性から, 有限要素法を中心とする空間離散化数値解析法が有効に利用されてきている。しかし分岐現象の解析手法に関しては, まだ解決されていない問題点も多く残されている。[4], [5]

単一の弾塑性柱に代表されるいわゆる対称分岐問題について

ては, Shanley [6] 以来かなり多くの研究が蓄積されている。

[7]      しかし, 弾性体の非対称分岐理論に対応するような弾塑性非対称分岐現象については, 本質的, 一般的な研究はまだ極めて少なく, 基本経路 (fundamental path) が対称性を保持する若干の単純な場合の非対称分岐現象について 2, 3 の研究が見られるに過ぎない。[2], [8]

最近, 著者等は分岐前挙動に関しても非対称性を示すような弾塑性肘型骨組及びその単純化モデルの解析を行った。[9] ここで得られた解析結果は, 弾塑性非対称構造物において一般的に見られるであろう座屈現象の本質的特徴を端的にかつ象徴的に示していると思われる。

本論文では, 左右の弾塑性バネの歪硬化係数が異なる非対称 Shanley model の座屈挙動を解析し, これによって弾塑性非対称分岐現象の機構及び特性をより単純かつ明解に提示するのがその目的である。モデルの釣合経路の閉型解を求め, それに含まれる種々のパラメータによる釣合経路の変化を検討する。Duberg, Wilder が弾塑性柱の対称分岐挙動の初期不整影響に関する研究 [7] の中で提案した状態領域図の概念を利用して, パラメータの変化に対応する釣合経路の変化を総合的に尽している。特に釣合経路群を分離する臨界経路については詳細に論じられる。非対称モデルの臨界経路と形態的に分

類し、対称モデルの場合と対比させながら説明する。本論文で展開される非対称 Shanley model の解析結果によって [9] で報告した肘型骨組の座屈挙動を良く説明できることが示される。

## 2. Notation, 仮定及び基礎式

(1) Notation ( ) 内は無次元化量を表わす。

$X$ , (  $x = 1$  ) : 柱中立軸からバネまでの距離

$H$ , (  $h$  ) : 柱剛体部分の長さ,  $h = H/X$

$Z$ , (  $z$  ) : 荷重偏心距離,  $z = Z/X$

$t$  : 径路(時間)パラメータ

$E$  (  $\varepsilon$  ) : 左右バネの平均縮み,  $\varepsilon = E/X$

$\theta$  : 柱回転角

$P$ , (  $p$  ) : 柱頭作用荷重,  $p = P/P_y$ ,  $P_y$ : 降伏荷重

$U_L$ , (  $u_L$  ) : 左バネ縮み,  $u_L = U_L/X$

$U_R$ , (  $u_R$  ) : 右バネ縮み,  $u_R = U_R/X$

$F_L$ , (  $f_L$  ) : 左バネ反力,  $f_L = F_L/P_y$

$F_R$ , (  $f_R$  ) : 右バネ反力,  $f_R = F_R/P_y$

$E$ , (  $e$  ) : バネの弾性係数,  $e = EX/P_y$

$E_{tL}$ , (  $e_{tL}$  ) : 左バネ歪硬化係数,  $e_{tL} = E_{tL}X/P_y$

$E_{tR}$ , (  $e_{tR}$  ) : 右バネ歪硬化係数,  $e_{tR} = E_{tR}X/P_y$

$\bar{E}_t$ , (  $\bar{e}_t$  ) : 左右バネ平均歪硬化係数,  $\bar{e}_t = \bar{E}_tX/P_y$

$\bar{P}_t, (\bar{p}_t)$  :  $\bar{E}_t$  に対する接線係数荷重,  $\bar{p}_t = \bar{P}_t / P_y$

$\alpha$  : 非対称性パラメータ

## (2) 仮定

- i) Fig-1 の柱モデルの柱頭部に偏心荷重  $P$  がゼロから単調に増加して作用する時の挙動(釣合経路)を考える。
- ii) Fig-1 のモデルの上型部分は剛体であり, 左右のバネは Fig-2 に示された bi-linear 応力-歪関係に従う弾塑性バネとする。左右バネの除荷時の歪配は弾性歪配に等しいとする。
- iii) バネの特性係数間に1次の不等式関係が成立つとする。
 
$$e > e_{tR} \geq e_{tL} > 0. \quad (1)$$

$e_{tR} = e_{tL}$  の場合は対称問題に帰着する。
- iv) 基礎式には  $O(\theta^3)$  以上のオーダーの項を無視した精度の式を採用する。

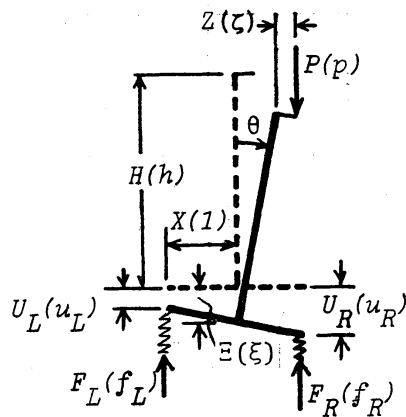


Fig-1 Non-symmetric Shanley type model

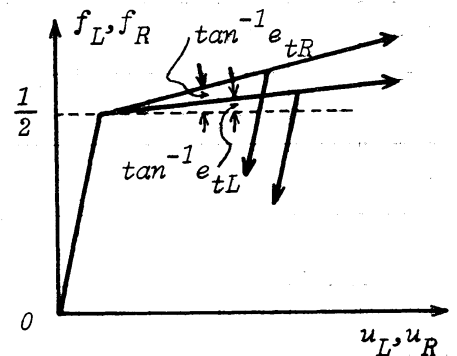


Fig-2 Spring characteristics

### (3) 基礎式

i) 歪 - 変位関係 (バネ縮み - 一般化変位関係)

$$u_L = \xi - \theta, \quad u_R = \xi + \theta. \quad (2)$$

ii) 釣合関係式

$$\begin{cases} p = f_R + f_L, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (h\theta + \zeta)p = f_R - f_L. & (4) \end{cases}$$

iii) 構成法則

$$\begin{cases} \text{左, 右バネ弾性} & f_{L,R} = eu_{L,R}, \quad \dot{f}_{L,R} = e\dot{u}_{L,R}, & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{左バネ塑性負荷} & f_L = \frac{1}{2} - \frac{e_{tL}}{2e} + e_{tL}u_L, \quad \dot{f}_L = e_{tL}\dot{u}_L, & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{右バネ塑性負荷} & f_R = \frac{1}{2} - \frac{e_{tR}}{2e} + e_{tR}u_R, \quad \dot{f}_R = e_{tR}\dot{u}_R, & (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{左, 右バネ除荷} & \dot{f}_{L,R} = \dot{e}u_{L,R}. & (8) \end{cases}$$

ここで  $(\cdot)$  は径路の進行に伴って単調増加する径路パラメータ  $t$  についての微係数を表わす。

### 3. 釣合径路解とバネ状態領域

Fig- 1 モデルの釣合径路は状態空間  $(p-\theta-\xi)$  内において、区分的に滑らかな曲線 (又は直線) の連結で表現される。従って、釣合径路は、左右バネが挙動状態 (弾性, 塑性負荷, 弾性除荷) を変えずに継続的に推移する、滑らかな曲線区間ごとに、解析的な解表現が与えられる。滑らかな曲線区間の節点である釣合径路の区切り点は、左又は右バネの降伏又は

除荷の開始に伴いバネ剛性が不連続に変化するために、釣合径路の勾配、曲率等が不連続となる点である。Fig-3 は種々の径路の進行に伴う左右バネ挙動の推移形態を図示したものである[E-E], [E-P]等の記号は左右バネ挙動の状態を[ ]内の文字の組合せで対応させて表現している。E, P, UE, UPは、弾性域での縮み、塑性域での縮み、弾性域での除荷(バネの伸び変形)、塑性域からの除荷のそれぞれの挙動を表わしている。例えば[E-P]は左バネは弾性域、右バネは塑性域で共に縮み変形が進行する釣合径路の滑らかな有限区間を表わす。区切り点(a1), (b1)等は左右いずれかのバネが降伏又は除荷(歪の進行方向が反転)を開始する点を示し、これらも境に左右いずれかのバネの剛性係数が不連続に変るか又は変位方向が縮みから伸びへと反転する。与えられたモデルの挙動は、寸法、バネ特性及び荷重偏心の諸パラメータに依存して決まる。今すべてのパラメータのうち荷重偏心量だけを、他を固定して変化させると、一組の連続した釣合径路集合を得る。こ

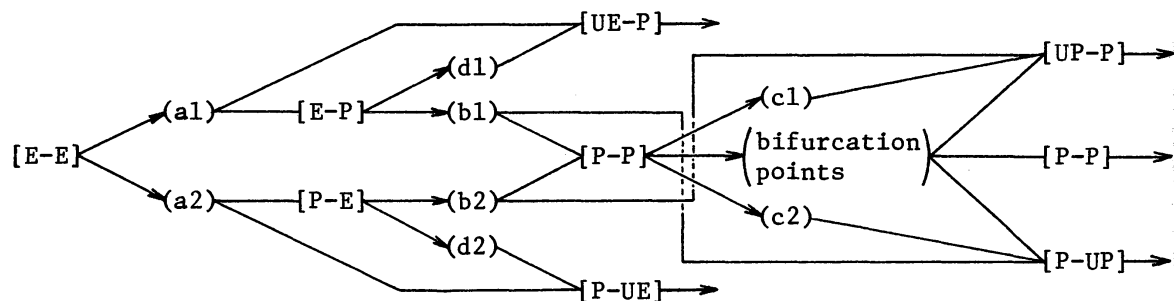


Fig-3

これは状態空間  $(p-\theta-\xi)$  内で曲面を表わす。これに伴って (a1), (b1) 等の区切り点は釣合径路曲面上に曲線を描く。区切り点の集合曲線及び特定の釣合径路を境界線として, 釣合径路集合の曲面は, 一定のバネ法則 (例えば [E-E], [P-P] など) で支配される釣合径路曲線分の集合である部分曲面に分割される。各々の部分曲面は, 支配されるバネ法則の組合せに対して [E-E] 領域, [P-P] 領域……と呼ぶ。各領域のバネの状態及び挙動の方向を Table-1 にまとめて示した。又 Table-2 には各区切り点におけるバネの状態及び歪進行方向が示してある。バネの反力及び歪は圧縮を正として定義した。5. 節で説明される Fig-8, 9, 10 は  $p-\theta$  平面での釣合径路及び領域を表わす図である。バネ状態領域図は Duberg, Wilder [7] によって初めて用いられたが, パラメータの変化に伴う釣合径路の変化や後に議論される分岐径路を調べるのに非常に役立つ。

各領域ごとに, 釣合径路解及び区切り点 (集合曲線) 解を以下に示す。

#### (1) [E-E] 領域内の釣合径路

[E-E] 領域でのバネ法則は (5) 式で与えられる。(5), (2) 式を (3) (4) 式に代入して, この領域内での解を次のように得る。

$$\begin{cases} p = 2e\xi, & (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (h\theta + \xi)p = 2e\theta, \quad p = \frac{2e}{h} \left\{ 1 - \frac{(\xi/h)}{(\theta + \xi/h)} \right\}. & (10) \end{cases}$$



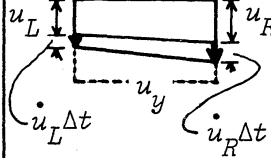
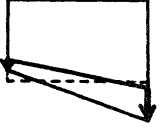
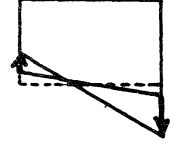
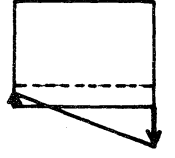
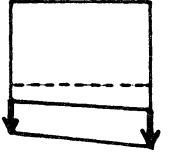
regions		[E-E]	[E-P]
state of left spring		$f_L < 1/2, \dot{u}_L > 0$	$f_L < 1/2, \dot{u}_L > 0$
state of right spring		$f_R < 1/2, \dot{u}_R > 0$	$f_R = f_{mR}, \dot{u}_R > 0$
strain behaviors in left and right springs			
[UE-P]	[UP-P]	[P-P]	
$f_L < 1/2, \dot{u}_L < 0$	$f_L < f_{mL}, \dot{u}_L < 0$	$f_L = f_{mL}, \dot{u}_L > 0$	
$f_R = f_{mR}, \dot{u}_R > 0$	$f_R = f_{mR}, \dot{u}_R > 0$	$f_R = f_{mR}, \dot{u}_R > 0$	
			

Table-1

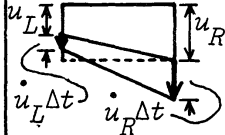
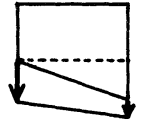
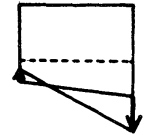
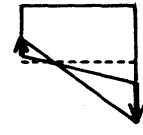
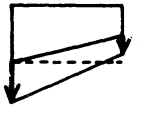
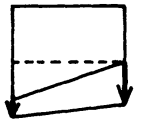
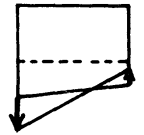
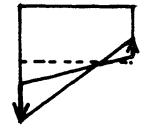
lines	(a1)	(b1)	(c1)	
state of left spring	$f_L < 1/2, \dot{u}_L = 0$	$f_L = 1/2, \dot{u}_L > 0$	$f_L = f_{mL}, \dot{u}_L = 0$	
state of right spring	$f_R = 1/2, \dot{u}_R > 0$	$f_R = f_{mR}, \dot{u}_R \geq 0$	$f_R = f_{mR}, \dot{u}_R > 0$	
strain behaviors in left and right springs				
(d1)	(a2)	(b2)	(c2)	(d2)
$f_L < 1/2, \dot{u}_L = 0$	$f_L = 1/2, \dot{u}_L > 0$	$f_L = f_{mL}, \dot{u}_L \geq 0$	$f_L = f_{mL}, \dot{u}_L > 0$	$f_L = f_{mL}, \dot{u}_L > 0$
$f_R = f_{mR}, \dot{u}_R > 0$	$f_R < 1/2, \dot{u}_R \geq 0$	$f_R = 1/2, \dot{u}_R > 0$	$f_R = f_{mR}, \dot{u}_R = 0$	$f_R < 1/2, \dot{u}_R = 0$
				

Table-2

(10)式は  $h\theta = -\zeta$  ,  $p = \frac{2e}{h}$  (Euler load) を漸近線とする双曲線である。弾性体の場合と異なり, 1対の双曲線のうち原点を通らないものは物理的に許容されるいかなる径路も表わさない。  
[E-E]領域内の径路は  $\zeta > 0$  の場合は右バネ,  $\zeta < 0$  の場合は左バネが降伏する点で打切られ, 次に続く径路に対してはFig-3に示された新たなバネ法則の組合せが適用されなければならない。

(i) (a1) 区切り点(集合曲線): 右バネ降伏。

右バネの降伏条件は次のように書ける。

$$f_R = e(\xi + \theta) = \frac{1}{2} \quad (11)$$

(a1) 区切り点の座標は連立方程式(9)(10)(11)の解として得られる。(a1)区切り点集合曲線(以下(a1)曲線と呼ぶ)は, (9)(10)(11)式より荷重偏心パラメータ  $\zeta$  を消去して次のように求められる。

$$p_{a1} = 1 - 2e\theta_{a1}, \quad p_{a1} = 2e\xi_{a1} \quad (12)$$

(ii) (a2) 区切り点(集合曲線): 左バネ降伏。

左バネ降伏条件は次のように書ける。

$$f_L = e(\xi - \theta) = \frac{1}{2} \quad (13)$$

(a2) 曲線は次のようである。

$$p_{a2} = 1 + 2e\theta_{a2}, \quad p_{a2} = 2e\xi_{a2} \quad (14)$$

(2) [E-P]及び[UE-P]領域内の釣合径路

[E-P]領域と[UE-P]領域との境界は、左バネの弾性域における除荷開始（歪進行方向の反転）によって特徴づけられる (d1) 曲線である。しかし弾性域での除荷によつてバネ法則は変わらないから、[E-P], [UE-P] 両領域内での釣合経路は同じ基礎式の組合せから求められる。従つて (d1) 区切り点で釣合経路は滑らかにつながる。この領域のバネ法則は (7) 式及び  $f_L = eu_L$  である。これらを (3) (4) 式に代入して次式を得る。

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2} - \frac{e_{tR}}{2e} + (e_{tR}+e)\xi + (e_{tR}-e)\theta, & (15) \\ (h\theta+\zeta)p = \frac{1}{2} - \frac{e_{tR}}{2e} + (e_{tR}-e)\xi + (e_{tR}+e)\theta. & (16) \end{cases}$$

(15) (16) 式から  $\xi$  を消去して、釣合経路の  $p$ - $\theta$  平面への投射を与える式を得る。

$$\{(h\theta+\zeta)(e_{tR}+e) - (e_{tR}-e)\}p = \{(e-e_{tR}) + 4e_{tR}\theta\}. \quad (17)$$

$h\theta = \frac{(e_{tR}-e)}{(e_{tR}+e)} - \zeta$ ,  $p = \frac{4e_{tR}e}{h(e_{tR}+e)} = p_{rR}$  を漸近線とする双曲線である。 $p_{rR}$  は両側バネがともに右側バネと同じ応力-歪特性を有する対称モデルの減少係数荷重 (reduced modulus load) を表わす。この領域内の釣合経路は  $|\zeta|$  が十分小さい範囲では、左バネの降伏により (b1) 点で打切られる。しかし  $|\zeta|$  がある限界値以上に大きければ、左バネは降伏点に至らずに引張り方向に除荷を開始する。これが (d1) 点である。

- (i) (b1) 区切り点 (集合曲線) : 右バネは既に塑性化しており、次いで左バネが降伏する点。

左バネ降伏条件(13)と(15)(16)とを連立させて解き (b1) 点の解を得る。又(15)(16)(13)式より  $\zeta$  を消去して次に示すような (b1) 線の解を得る。

$$p_{b1} = 1 + 2e_{tR}\theta_{b1}, \quad \xi_{b1} = \frac{1}{2e} + \theta_{b1}. \quad (18)$$

(ii) (d1)区切り点(集合曲線): 右バネは既に塑性化し, 左バネが降伏点に到達せずに弾性域で除荷を開始する。

左バネの除荷開始条件を以下に導く。(2)(3)(4)式を path parameter  $t$  で微分して, 次の rate 量に関する基礎式を得る。

$$\dot{p} = \dot{f}_R + \dot{f}_L, \quad (19)$$

$$(h\theta + \zeta)\dot{p} + hp\dot{\theta} = \dot{f}_R - \dot{f}_L. \quad (20)$$

$$\dot{f}_L = e(\dot{\xi} - \dot{\theta}), \quad \dot{f}_R = e_{tR}(\dot{\xi} + \dot{\theta}). \quad (21)$$

(21)式を (19)(20)式に代入して次式を得る。

$$\dot{p} = (e_{tR} + e)\dot{\xi} + (e_{tR} - e)\dot{\theta}, \quad (22)$$

$$(h\theta + \zeta)\dot{p} = (e_{tR} - e)\dot{\xi} + \{(e_{tR} + e) - hp\}\dot{\theta}. \quad (23)$$

(22)(23)式を,  $\dot{\xi}$  及び  $\dot{\theta}$  に関して解くと, 次式を得る。

$$\dot{\xi} = \frac{\{(e_{tR} + e) - hp - (e_{tR} - e)(h\theta + \zeta)\}}{\{4e_{tR}e - (e_{tR} + e)hp\}} \dot{p}, \quad (24)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\{(e_{tR} + e)(h\theta + \zeta) - (e_{tR} - e)\}}{\{4e_{tR}e - (e_{tR} + e)hp\}} \dot{p}. \quad (25)$$

(24)(25)式を用いて[E-P]領域における左バネの歪速度が得られ, 除荷条件は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\dot{u}_L &= \dot{\xi} - \dot{\theta} = \frac{\{2e_{tR}(1-h\theta-\zeta)-hp\}}{\{4e_{tR}e-(e_{tR}+e)hp\}} \dot{p} \\ &= \frac{[2e_{tR}\{-4e_{tR}e\theta+(e_{tR}-e)+2ep\}-(e_{tR}+e)hp^2]}{(e_{tR}+e)p\{4e_{tR}e-(e_{tR}+e)hp\}} \dot{p} = 0. \quad (26)\end{aligned}$$

(26)式の(分子)=0の式において, (17)式を用いて $\zeta$ を消去すると, (d1)曲線の $p-\theta$ 平面への投射を与える式を得る。

$$\theta_{d1} = \frac{(e_{tR}-e)}{4e_{tR}e} + \frac{e}{2(e_{tR}+e)h} - \frac{(e_{tR}+e)h}{8e_{tR}^2e} \left\{ p_{d1} - \frac{2e_{tR}e}{h(e_{tR}+e)} \right\}^2. \quad (27)$$

これは  $p = \frac{2e_{tR}e}{h(e_{tR}+e)}$  を対称軸とするパラボラである。

### (3) [P-E]及び[P-UE]領域内の釣合径路

(2)の[E-P]及び[UE-P]領域内の釣合径路を表わす式(17)において,  $e, e_{tR}$ をそれぞれ $e_{tL}, e$ に変換して書けば, [P-E]及び[P-UE]領域内の釣合径路の $p-\theta$ 平面への投射曲線を表わす式を得る。

$$\{(e+e_{tL})(h\theta+\zeta)-(e-e_{tL})\}p = -(e-e_{tL}) + 4ee_{tL}\theta. \quad (28)$$

これは  $h\theta = \frac{(e-e_{tL})}{(e+e_{tL})} - \zeta$ ,  $p = \frac{4ee_{tL}}{(e+e_{tL})h} = p_{rL}$  を漸近線とする双曲線である。ここに $p_{rL}$ は両バネとも左側バネと同じ応力-歪特性を有する対称モデルに関する減少係数荷重である。この領域の径路は次の2種類の条件のいずれかで打切られる。

- (i) (b2)区切り点(集合曲線): 左バネは既に塑性域にあり, 次いで右バネも降伏する点。

右バネの降伏条件式(11)を用いて(b2)線は次式で得られる。

$$p_{b2} = 1 - 2e_{tL}\theta_{b2}, \quad \xi_{b2} = \frac{1}{2e} - \theta_{b2}. \quad (29)$$

(ii) (d2) 区切り点 (集合曲線) : 左バネは既に塑性域にあり, 右バネが降伏点に到達せずに弾性域で除荷を始める点。

$$\text{右バネの除荷開始条件: } \dot{u}_R = 0, \ddot{u}_R < 0. \quad (30)$$

を満足する (d2) 線は次式で与えられる。

$$\theta_{d2} = \frac{(e-e_{tL})}{4ee_{tL}} - \frac{e}{2(e+e_{tL})h} + \frac{(e+e_{tL})h}{8ee_{tL}} \left\{ p_{d2} - \frac{2ee_{tL}}{(e+e_{tL})h} \right\}^2. \quad (31)$$

#### (4). [P-P] 領域内の釣合径路

左右バネの塑性法則 (6), (7) 式及び歪 - 変位関係式 (2) を, 釣合式 (3), (4) に代入して, 一般化変位  $\xi, \theta$  で表現された釣合式を次のように得る。

$$\begin{cases} p = 1 - \frac{1}{2e}(e_{tR}+e_{tL}) + (e_{tR}+e_{tL})\xi + (e_{tR}-e_{tL})\theta, \\ (h\theta+\zeta)p = -\frac{1}{2e}(e_{tR}-e_{tL}) + (e_{tR}-e_{tL})\xi + (e_{tR}+e_{tL})\theta. \end{cases} \quad (32)$$

(32), (33) 式より  $\xi$  を消去して [P-P] 領域内釣合径路の  $p$ - $\theta$  関係を次式のように得る。

$$\{4e_{tR}e_{tL}\theta - (e_{tR}-e_{tL})\} = \{(e_{tR}+e_{tL})(h\theta+\zeta) - (e_{tR}-e_{tL})\}p. \quad (34)$$

これは一般には (35) 式を漸近線とする双曲線である。

$$p = \frac{4e_{tR}e_{tL}}{(e_{tR}+e_{tL})h} (= p_C), \quad h\theta = \frac{(e_{tR}-e_{tL})}{(e_{tR}+e_{tL})} - \zeta. \quad (35)$$

荷重偏心量  $\zeta$  が (37) 式の値の時, (34) 式は (35) の第 1 式, (36) 式でそれぞれ表わされる,  $\theta, p$  軸に平行な 2 直線を表わす。

$$\theta = \frac{(e_{tR} - e_{tL})}{4e_{tR}e_{tL}} \quad (= \theta_C) . \quad (36)$$

$$\zeta = \frac{(e_{tR} - e_{tL})}{(e_{tR} + e_{tL})} \left\{ 1 - \frac{(e_{tR} + e_{tL})h}{4e_{tR}e_{tL}} \right\} \quad (= \zeta_C) . \quad (37)$$

(35), (36) で定義された  $p_C, \theta_C$  はこの2直線の交点の  $p, \theta$  座標である。この交点は分岐点として重要な意味を持つものであり5.節で詳しく説明される。[P-P] 領域内の釣合径路は左側又は右側バネの除荷開始によって打切られる。

(i) (c1) 区切り点 (集合曲線) : 左バネが塑性域から除荷を開始する点。

左右バネの応力 - 歪速度関係式は次のようである。

$$\dot{f}_L = e_{tL}(\dot{\xi} - \dot{\theta}) , \quad \dot{f}_R = e_{tR}(\dot{\xi} + \dot{\theta}) . \quad (38)$$

(38) 式を (19), (20) 式に代入し,  $\dot{\xi}$  及び  $\dot{\theta}$  に関して解くと, 次式を得る。

$$\dot{\xi} = \frac{\{(e_{tR} + e_{tL}) - hp - (e_{tR} - e_{tL})(h\theta + \zeta)\}}{\{4e_{tR}e_{tL} - (e_{tR} + e_{tL})hp\}} \dot{p} , \quad (39)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\{(e_{tR} + e_{tL})(h\theta + \zeta) - (e_{tR} - e_{tL})\}}{\{4e_{tR}e_{tL} - (e_{tR} + e_{tL})hp\}} \dot{p} . \quad (40)$$

(39), (40) 式及び(2)式を用いて左バネ歪速度  $\dot{u}_L$  は次のように書ける。

$$\dot{u}_L = \dot{\xi} - \dot{\theta} = \frac{[2e_{tR}\{2e_{tL}p - 4e_{tR}e_{tL}\theta + (e_{tR} - e_{tL})\} - (e_{tR} + e_{tL})hp^2]}{(e_{tR} + e_{tL})p\{4e_{tR}e_{tL} - (e_{tR} + e_{tL})hp\}} \dot{p} . \quad (41)$$

従って, (c1) 線を与える式は左バネの除荷開始条件  $\dot{u}_L = 0$  より次のようになる。

$$\begin{aligned}\theta_{c1} &= \frac{(e_{tR} - e_{tL})}{4e_{tR}e_{tL}} + \frac{e_{tL}}{2(e_{tR} + e_{tL})h} - \frac{(e_{tR} + e_{tL})h}{8e_{tR}^2e_{tL}} \left\{ p_{c1} - \frac{2e_{tR}e_{tL}}{(e_{tR} + e_{tL})h} \right\}^2 \\ &= \theta_C + \frac{p_C}{8e_{tR}} - \frac{1}{2e_{tR}p_C} \left\{ p_{c1} - \frac{p_C}{2} \right\}^2.\end{aligned}\quad (42)$$

これは  $p = p_C/2$  を対称軸とし, 点  $(p_C, \theta_C)$  を通るパラボラである。

(ii). (c2) 区切り点 (集合曲線): 右バネが塑性域から除荷を開始する点。

(4). (i) の (c1) 線の場合と類似の計算により右バネ歪速度を表わす式を次のように得る。

$$\dot{u}_R = \dot{\xi} + \dot{\theta} = \frac{[2e_{tL}\{2e_{tR}p + 4e_{tR}e_{tL}\theta - (e_{tR} - e_{tL})\} - (e_{tR} + e_{tL})hp^2]}{(e_{tR} + e_{tL})p\{4e_{tR}e_{tL} - (e_{tR} + e_{tL})hp\}} \dot{p}.\quad (43)$$

(c2) 線を表わす式は次のようである。

$$\theta_{c2} = \theta_C - \frac{p_C}{8e_{tL}} + \frac{1}{2e_{tL}p_C} \left\{ p_{c2} - \frac{p_C}{2} \right\}^2.\quad (44)$$

これは  $p = \frac{p_C}{2}$  を対称軸として, 点  $(p_C, \theta_C)$  を通るパラボラである。

#### 4. 釣合経路解の唯一性

Hill によって初めて一般化された [1], 弾塑性体の解の唯一性を保障する十分条件を本モデルに適用すると, 次の条件式が得られる。



$$\det |K_H| = 4e_{HR}e_{HL} - (e_{HR} + e_{HL})hp > 0. \quad (45)$$

ここに  $\det |K|$  は Hill の定義によるいわゆる comparison model に対する接線剛性マトリックスである。

$$[K_H] = \begin{vmatrix} (e_{HR} + e_{HL}) & (e_{HR} - e_{HL}) \\ (e_{HR} - e_{HL}) & (e_{HR} + e_{HL} - hp) \end{vmatrix}. \quad (46)$$

$e_{HL}, e_{HR}$  は次のように定義される。

$$e_{HL} \begin{cases} = e & \text{for } f_L < f_{mL} \\ = e_{tL} & \text{for } f_L = f_{mL} \end{cases}, \quad (47)$$

$$e_{HR} \begin{cases} = e & \text{for } f_R < f_{mR} \\ = e_{tR} & \text{for } f_R = f_{mR} \end{cases}. \quad (48)$$

すなわち,  $e_{HL}, e_{HR}$  はバネが弾性域にある場合には弾性係数  $e$  を, 塑性域にある場合はバネの歪速度応答の負荷, 除荷に拘らず塑性負荷係数  $e_{tL}, e_{tR}$  をそれぞれ表わすものである。 $f_{mL}, f_{mR}$  はそれぞれ左右バネに対する, 初期降伏応力値又は過去における最大応力値のうち大きい方を表わす。釣合経路の各領域について, 解の唯一性十分条件 (45) が満足される領域を以下に示す。

$$[E-E] \text{ 領域} : \det |K_H| = 4e^2 - 2ehp > 0$$

$$p < \frac{2e}{h} = p_E. \quad (49)$$

$$[E-P], [UE-P], [UP-P] \text{ 領域} : \det |K_H| = 4ee_{tR} - (e + e_{tR})hp > 0$$

$$p < \frac{4ee_{tR}}{h(e + e_{tR})} = p_{rR}. \quad (50)$$

$$[P-E], [P-UE], [P-UP] \text{ 領域} : \det |K_H| = 4e_{tL}e - (e_{tL} + e)hp > 0$$

$$p < \frac{4e_{tL}e}{h(e_{tL}+e)} = p_{rL}. \quad (51)$$

$$[P-P] \text{ 領域} : \det|K_H| = 4e_{tL}e_{tR} - (e_{tL}+e_{tR})hp > 0$$

$$p < \frac{4e_{tL}e_{tR}}{h(e_{tL}+e_{tR})} = p_C. \quad (52)$$

(49) (50) (51) (52) 式はそれぞれ対応する領域内釣合径路の  $p - \theta$  平面への投影である双曲線の  $\theta$  軸より下の領域を表わす。従って各領域内の釣合径路は  $\theta$  軸に平行な漸近線より低い荷重を与える側の領域にある双曲線分枝の部分として表わされていれば、それは“唯一”の解である。この唯一性条件は安定性の十分条件にもなっており、これが満足される釣合径路上の釣合状態は“安定”な釣合状態であることも同時に結論できる。

## 5. 釣合径路群と臨界径路

柱モデルは、荷重を中心より右に、( $\xi > 0$ )、作用させた時は右に、十分左に偏心して作用させた時は左に傾いて倒れる。このように釣合径路は左又は右に倒れる2通りに分類されるが、対応する2種類の釣合径路群を分離する臨界径路を検討するのが本節の目的である。釣合径路群の分離点となり得る釣合点は次に示す4種類である。これらはいずれも複数個の釣合径路区切り線の交点として特徴づけられる。

(i) c 点 : (c1) 線と (c2) 線との交点。

C点の座標は (42), (44) 式から計算され, 3. 節で既に求めた [P-P] 領域内釣合径路の特異点 (双曲漸近線の交点) の座標 (35), (36) 式に一致する。Fig-4 に [P-P] 領域内の漸近線, (42) (44) 式の放物線及び C 点を図示する。Fig-4 中斜線部分は, [P-P] 釣合径路が要求する左右バネの歪速度が共に非負である条件式  $\dot{u}_L > 0, \dot{u}_R > 0$  が満足される領域を表わす。

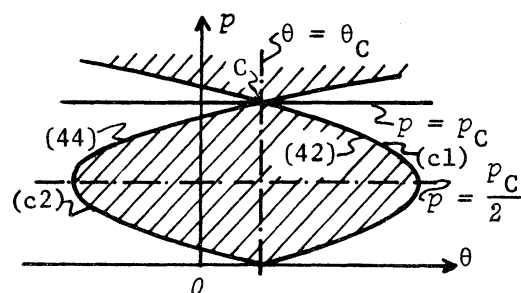


Fig-4 Region of  $\dot{u}_L > 0$  &  $\dot{u}_R > 0$

(ii) B1 点 : (b1), (c1), (d1) 線の交点。

この点は, 右バネは既に塑性域にあり, 左バネが降伏点に達した瞬間に歪速度がゼロ (neutral loading) となり除荷を始める点である。すなわち B1 点では次式が成立つ。

$$f_L = \frac{1}{2}, \quad \dot{e}_L = 0. \quad (53)$$

(18), (27) 式を連立させて解き, B1 点の  $p, \theta$  座標及びこの点を通る釣合径路を与える荷重偏心量  $e$  を次のように得る。

$$p_{B1} = \sqrt{\frac{2e_{tR}}{h}} \quad (54), \quad \theta_{B1} = \frac{1}{2e_{tR}} \left\{ \sqrt{\frac{2e_{tR}}{h}} - 1 \right\}. \quad (55)$$

$$\zeta_{B1} = \left\{ 1 - \sqrt{\frac{h}{2e_{tR}}} \right\}^2. \quad (56)$$

(54), (55) 式を (c1) 線を表わす (42) 式に代入すると等号の成立することが示され, これによって (c1) 線も又 B1 点を通るこ

とがわかる。B1 点における左右バネの歪挙動を Fig-5 に示す。

(iii) B2 点 : (b2), (c2), (d2) 線の交点。

この点は、左バネは既に塑性域にあり、右バネが降伏と同時に歪速度ゼロとなり除荷を始める点である。

$$f_R = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \dot{e}_R = 0. \quad (57)$$

B2 点の  $p$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$  は次式で表わされる。

$$p_{B2} = \sqrt{\frac{2e_{tL}}{h}} \quad (58), \quad \theta_{B2} = \frac{1}{2e_{tL}} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2e_{tL}}{h}} \right\}, \quad (59)$$

$$\zeta_{B2} = - \left\{ 1 - \sqrt{\frac{h}{2e_{tL}}} \right\}^2. \quad (60)$$

B2 点における左右バネの歪挙動を Fig-6 に示す。

(iv) A 点 :  $p$  軸及び (a1), (a2), (b1), (b2) 線の交点。

これは左右バネが同時に降伏する点である。

$$p_A = 1 \quad (61), \quad \theta_A = 0, \quad (62)$$

$$\zeta_A = 0 \quad (63)$$

釣合径路図及び領域図は、モデルの種々のパラメータ値に依存して変化する。ここでは無次元化平均接線係数荷重  $\bar{p}_t$  及び非対称性パラメータ  $\alpha$  の変化に伴う領域図の変化を、c, B1, B2 点の移動に着目して明らかにする。 $\bar{p}_t$  及び  $\alpha$  は、平均歪硬化係数  $\bar{e}_t = (e_{tL} + e_{tR})/2$  を用いて次のように定義する。

$$e_{tL} = (1-\alpha)\bar{e}_t, \quad e_{tR} = (1+\alpha)\bar{e}_t \quad (64), \quad \bar{p}_t = \frac{2\bar{e}_t}{h}. \quad (65)$$

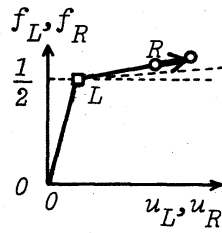


Fig-5 Spring behaviors at point B1

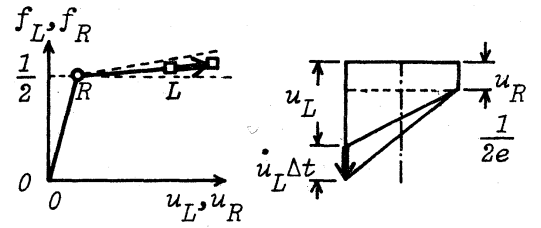
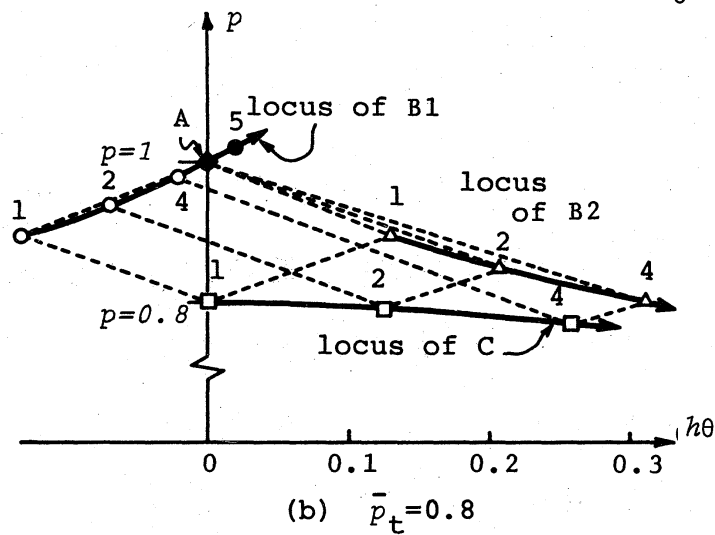
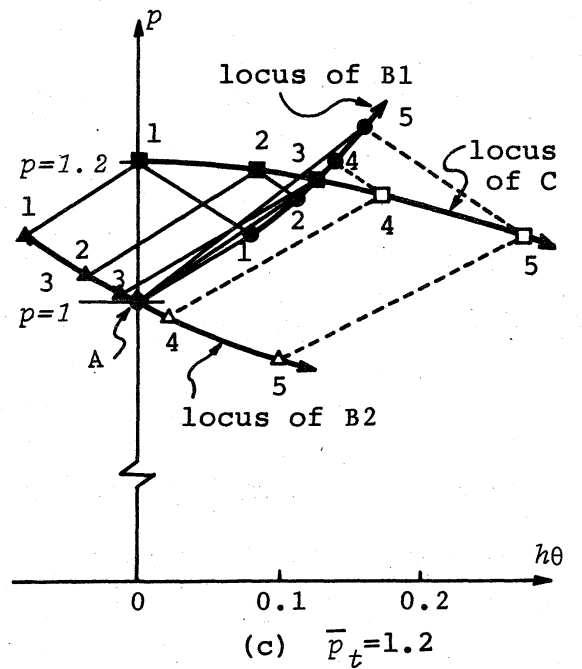
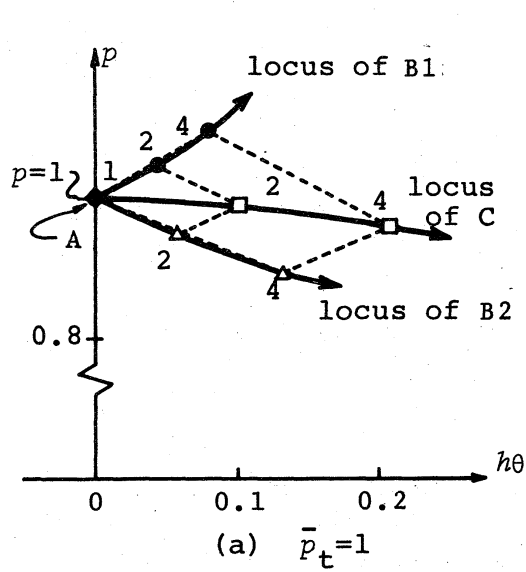


Fig-6 Spring behaviors at point B2



- 1 :  $\alpha=0$  (symmetric)
- 2 :  $\alpha=0.1$
- 3 :  $\alpha=0.148$
- 4 :  $\alpha=0.2$
- 5 :  $\alpha=0.3$

Fig-7 Loci of points C, B1, B2 ( $e/\bar{e}_t = 10$ )

Fig-7 (a), (b), (c) はそれぞれ無次元化平均接線係数荷重  $\bar{p}_t$  が降伏点  $p_y (=1)$  と一致する場合 ( $\bar{p}_t=1$ ), 低い場合 ( $\bar{p}_t=0.8$ ), 高い場合 ( $\bar{p}_t=1.2$ ) の,  $\alpha$  の変動に伴う C, B1, B2 点の移動を示した図である。■, ●, ▲ はモデルが現実には到達し得る状態としての C, B1, B2 点をそれぞれ表わし, □, ○, △ はモデルが現実には到達し得ない物理的に無意味な点を表わす。 $\alpha=0$  の場合は対称モデルを意味し, C 点は  $p$  軸上に, B1, B2 点は  $p$  軸に対して対称な位置に存在する。Fig-7(a),  $\bar{p}_t=1$  では C, B1, B2 点がすべて A 点に重なる。Fig-7(b),  $\bar{p}_t=0.8$  では C 点は A 点より低い位置にあり無意味な点である。Fig-7(c),  $\bar{p}_t=1.2$  では C 点は A 点より高い位置にあり, B1, B2 点はそれぞれ  $\theta$  の正及び負の領域に存在する。この場合 C, B1, B2 点はすべて現実的意味のある点となる。

#### (1). 対称モデルの臨界径路

対称モデルの臨界径路は常に  $\zeta=0$  によって与えられる分岐径路である。分岐の基本径路は  $p-\theta$  平面で  $p$  軸に一致する。対称モデルの塑性分岐点としては,  $\bar{p}_t$  の値域によって次の2通りの場合がある。

(i). 接線係数分岐点    C 点    for    $\bar{p}_t \geq 1$

(ii). 降伏点分岐点    A 点    for    $\bar{p}_t < 1$

いずれの場合にも  $\theta$  の正及び負方向に対称に一对の分岐分枝

が發する。(i) の場合は、分岐の發生と同時に片方のバネが中立負荷状態から除荷する。他方 (ii) の分岐点では片方のバネが有限な負(引張方向)の歪速度で除荷を始めるのが特徴的な相違点である。

## (2). 非対称モデルの釣合径路群と臨界径路

Fig-7(a)(b)(c) から明らかなように A, C, B1, B2 点の位置関係は 3通りのケースに分類でき、そのそれぞれについて異なった特性を示す釣合径路図及び臨界径路が対応する。Fig-8, 9, 10 にそれぞれの例が示され以下で順次説明を加える。

### [i]. C 点を通る釣合径路が臨界径路となる場合

これは A, B1, B2, C のすべての点が現実的な点として存在する場合である。例として  $\bar{p}_t = 1.2$ ,  $\alpha = 0.1$  の場合の釣合径路図を

Fig-8 に示した。この時の臨界径路は分岐径路であり、C 点はその分岐点である。分岐径路を与える荷重偏心値は (37) 式の  $\zeta_c$  である。基本径路は、[E-E] 領域では緩やかに右に傾きながら進み、(a1) 点で右バネが降伏することにより更に強く右に傾く。その後 (b1) 点で左バネも降伏し、 $p$  軸に平行に鉛直に上昇する。この鉛直基本径路上に C 点が存在し、これが最小分岐点となる。C 点からは一対の分岐分枝が荷重の上昇を伴って左右に分れて發する。分岐分枝の發生と同時に、柱の傾きと反対側のバネが中央負荷状態から除荷を開始する。左

に向う分枝の勾配は、右のそれよりも小さく、非対称形をなす。最小分岐点より上の基本径路からは、連続的に至るところで分岐が可能である。

[ii]. B1 点を通る釣合径路が臨界径路となる場合

これは C 点が B1 点よりも低い位置にあり物理的意味のない点で、B1 点は意味のある点として存在する場合である。例として  $\bar{p}_t=1$ ,  $\alpha=0.1$  の場合の釣合径路図が Fig-9 に示されている。この時、臨界径路は B1 点を通る釣合径路であり、釣合径路群は B1 点で左右両方向に分離する。ただし  $e_{tL} > e_{tR}$ ,  $\alpha < 0$  の時は、B2 点が釣合径路群の分離点となる。B1 点を通る臨界径路は (56) の偏に値  $\epsilon_{B1}$  で与えられる。B1 分離点から  $\theta$  の正及び負の方向に径路が分離する。 $\theta$  の正の方向に進む径路は B1 点に至るまでの釣合径路と滑らか（任意の次数の微係数が連続）につながる [UP-P] 径路である。 $\theta$  の負方向に向う径路は  $\theta$  軸に関して進行方向を急激に反転させる [P-UP] 径路である。前者の径路に沿う挙動において、左バネの除荷は中立負荷状態からゆるやかに生じる。後者の径路に沿う挙動では、右バネが有限な負の速度をもって急激に除荷する。

[iii]. A 点を通る釣合径路が臨界径路となる場合

これは C, B1, B2 点がすべて A 点より低い位置にあり、いずれも物理的意味を持たない場合である。この時の臨界径路は



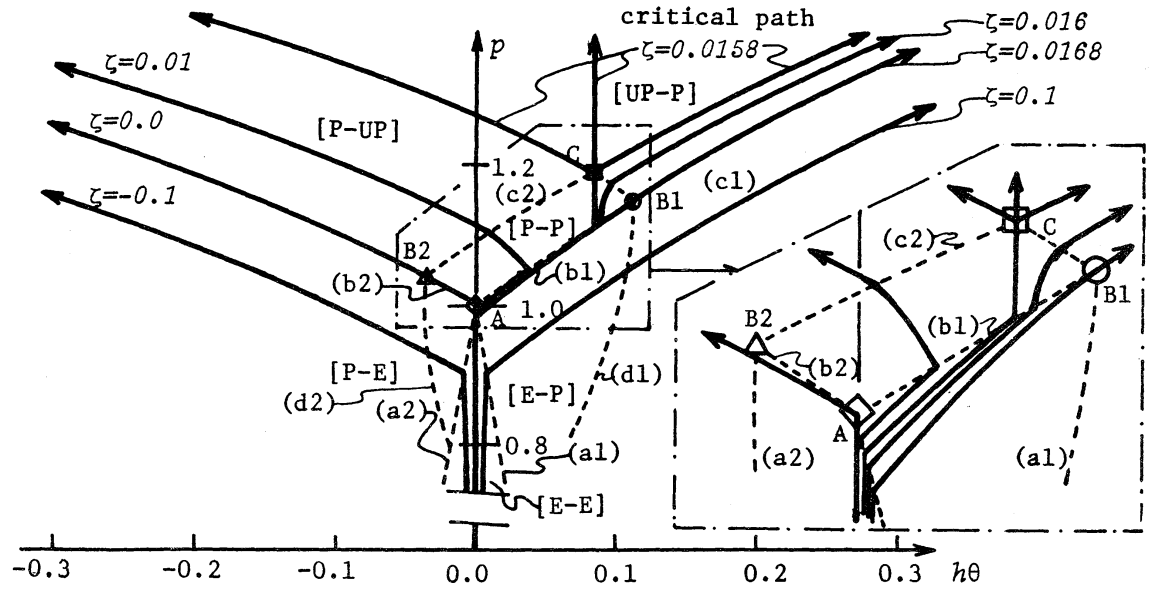


Fig-8 Equilibrium paths for  $\bar{p}_t = 1.2$ ,  $e/\bar{e}_t = 10$ ,  $\alpha = 0.1$

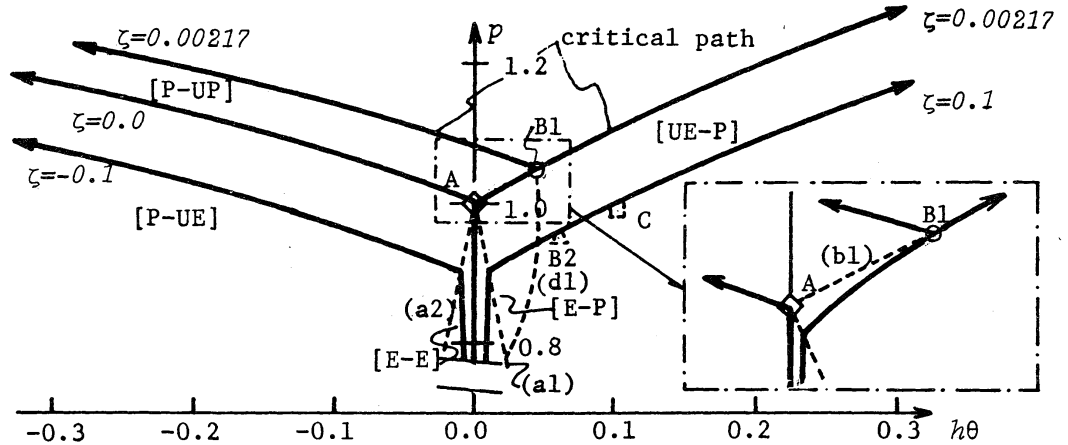


Fig-9 Equilibrium paths for  $\bar{p}_t = 1.0$ ,  $e/\bar{e}_t = 10$ ,  $\alpha = 0.1$

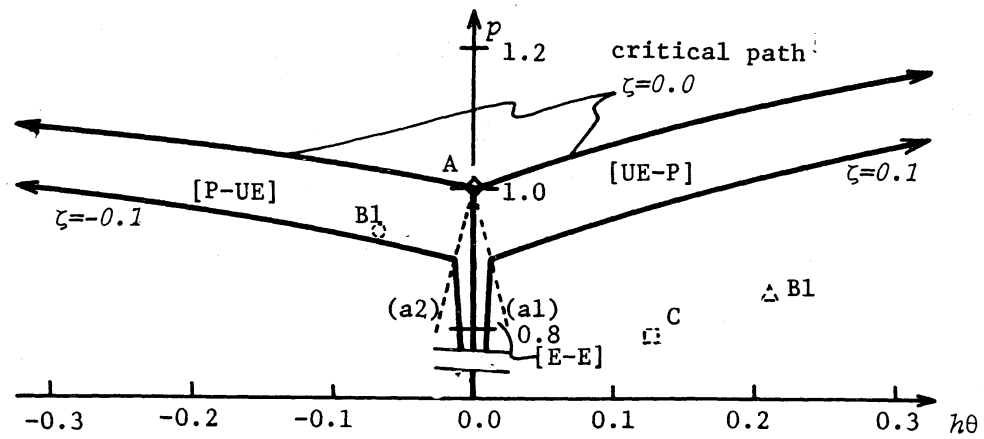


Fig-10 Equilibrium paths for  $\bar{p}_t = 0.8$ ,  $e/\bar{e}_t = 10$ ,  $\alpha = 0.1$

A点を分岐点とする分岐経路である。例として  $\bar{p}_t = 0.8$ ,  $\alpha = 0.1$  の場合が Fig-10 に示されている。分岐経路は  $\zeta = 0$  の経路であり、その基本経路は  $p$  軸に沿って鉛直に上昇し、分岐点 A に達して左右両バネが同時に降伏する。A 点からは  $\theta$  の正及び負両方に、勾配の異なる一対の分岐分枝が発生する。どちらの分岐分枝に対する挙動においても、柱の傾きと反対側のバネは有限の大きさを持つ歪速度をもって A 点から除荷する。

以上で示されたように、非対称弾塑性柱モデルの臨界挙動は (2). [i], [ii], [iii] の3種類に分類される。[i] 及び [iii] の場合は、対称柱モデルにおける (i) 及び (ii) の分岐現象と本質的特徴においてそれぞれ共通する。しかし [ii] の臨界経路の形態は対称モデルでは見られない非対称モデルに特有のものであると思われる。最後に臨界経路に対する接線剛性行列式の値  $\det|K|$  の荷重  $p$  に対する変動を Fig-11 に模式的に示す。これは  $\bar{p}_t = 1.2$  の場合であり、第3軸には非対称性パラメータ  $\alpha$  をとり、3個の  $\alpha$  値に対する  $\det|K| - p$  関係図が示されている。

$\alpha = 0$  の図は、対称分岐 (i) の場合に対応し、 $\alpha = 0.1$ ,  $\alpha = 0.2$  はそれぞれ非対称モデルの臨界経路に関する分類の [i] 及び [ii] の場合に対応している。

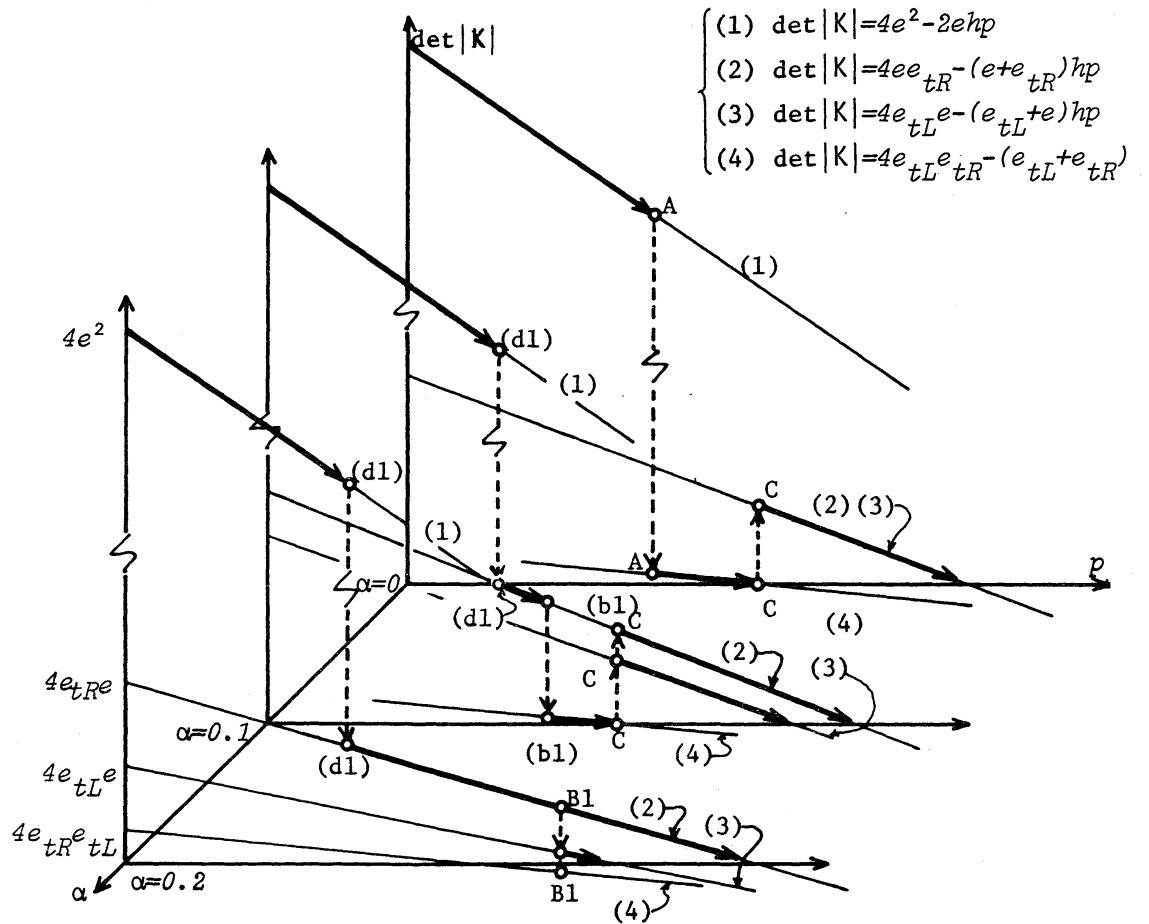


Fig-11 Variations of  $\det|K|$  along some critical paths for  $\bar{p}_t = 1.2$

## 7. 肘型弾塑性骨組の解析結果との比較

Fig-12, Fig-13 は文献 [9] で発表した弾塑性鉛直柱部材と弾塑性水平梁部材を剛接して構成された肘型骨組の柱頭漸増載荷に対する応答解析結果の一部である。縦軸は荷重、横軸は柱たわみ量を表わす。Fig-12 は、柱頭をピン支持した柱の接線係数荷重  $P_t$  が、柱降伏軸力  $P_y$  より僅かに低い場合で、Fig-13 は  $P_t$  が  $P_y$  の  $\frac{1}{2}$  以下の場合である。Fig-12 の釣合経路図は、明らかに広い菱形の [P-P] 領域を有し、Fig-8 に示された非対

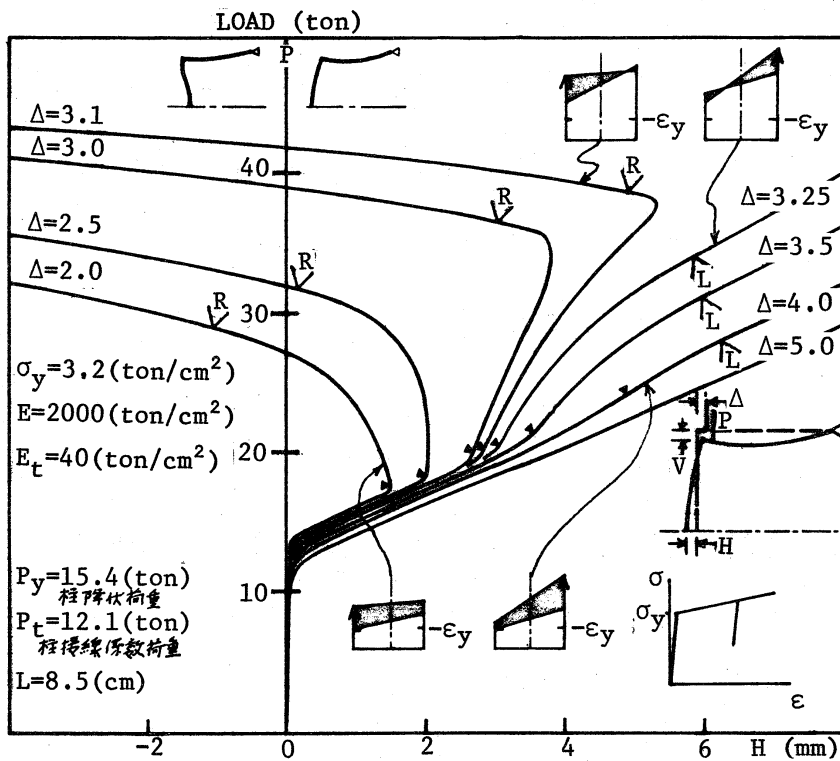


Fig-12 Equilibrium paths of an elbow shaped elastic-plastic frame

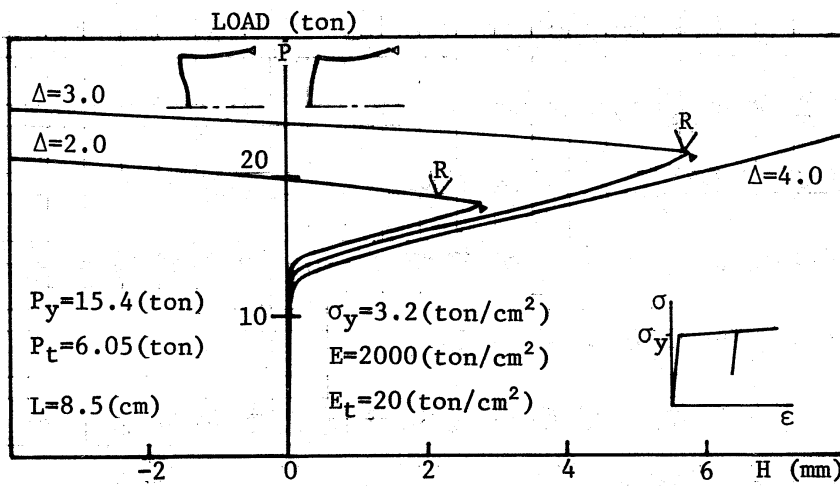


Fig-13 Equilibrium paths of an elbow shaped elastic-plastic frame

称モデルのタイプ [i] の臨界経路を示す釣合経路図と極めて類似した特性を示している。又 Fig-13 の釣合経路図は、タイプ [ii] の例である Fig-9 に類似していることがわかる。肘型骨組の非対称性は、梁部材の柱部材に対する柱頭回転拘束によるものであり、Fig-1 モデルの左右バネ特性の違いによる非対称性とは異なる。それにも拘らず、上記で示したように、肘型モデルと非対称 Shanley model の挙動との間に多くの本質的特性における類似点が見られることは非常に興味深い。

## 8. 結語

左右バネの歪硬化係数の異なる Shanley-type model の釣合経路解を求めた。4. 節では、この釣合経路の唯一性及び安定性を検討した。5. 節では釣合経路図及びバネ状態領域図のパラメータによる変化の様相を解明し、これに基づいて臨界経路を3種類の形態に分類し、それぞれの特徴を述べた。以上の研究により明らかにされた、非対称モデルの弾塑性座屈挙動の特性は次のようにまとめられる。

- 1) たわみ方向の反転する釣合経路が見出された。これは、荷重偏心量が特定の値域に存在する場合に現われる。
- 2) 非対称モデルについて 5.(2).[i],[ii],[iii] の3種類の臨界経路が存在することが示された。

3) 非対称モデルの臨界経路 [i] の特徴は、対称モデルにおける接線係数型分岐経路に、臨界経路 [iii] は降伏点分岐型分岐経路にそれぞれ類似している。

4) 臨界経路 [ii] は非対称モデルに特有のものであり、対称モデルにおいては、これと類似の臨界経路は見られない。

5) 非対称モデルでは、弾性域で柱がたわまずに挙動する偏心ゼロの経路は、一般に臨界経路とはならない。実際 [i], [ii] の臨界経路では、柱の傾いた釣合状態から釣合経路が分離する。

7. 節では、以上の非対称 Shanley type model の釣合経路における諸特性が、文献 [9] に提示された肘型弾塑性骨組の座屈挙動解析結果にも共通して見られることが示された。このことと、対称形の Shanley model が対称弾塑性分岐の諸特性を殆んどすべて具備している事実から見て、ここで解明した非対称 Shanley model の諸特性が、一般非対称分岐現象の主要な特性を象徴していると期待してよいと思われる。

# REFERENCES

- [1] R. Hill, On the Problem of Uniqueness and Stability of a Rigid-Plastic Solid, I, II, III, IV, *J. Mech. Phys. Solids*, 4, 247-255, 5, 1-8, 1956; 5, 153-161, 302-307, 1957.
- [2] J. W. Hutchinson, Post-bifurcation Behavior in Plastic Range, *J. Mech. Phys. Solids*, 21, 163-190, 1973.
- [3] M. J. Sewell, *Stability* (Edited by H. Leipholz), Ch.5, University of Waterloo Press, Ontario, 1972.
- [4] Y. Yokoo, Tsuneyoshi Nakamura and K. Uetani, The Incremental Perturbation Method for Large Displacement Analysis of Elastic-Plastic Structures, *Int. J. Num. Methods in Engg.*, 10, 503-525, 1976.
- [5] 中村恒善, 上谷宏二, 複合非線型問題の数値解析法, 成岡昌夫・中村恒善共編, 「骨組構造解析法要覧」第8章, 159-184, 培風館, 1976.
- [6] F. R. Shanley, Inelastic Column Theory, *J. Aero. Sci.*, 14, 261-268, 1947.
- [7] J. E. Duberg and T. W. Wilder, Inelastic Column Behavior, *NACA Report*, 1072, 1952,  
J. E. Duberg, Inelastic Buckling, *Handbook of Engg. Mech.* (edited by W. Flugge), McGraw-Hill, 52.1-52.9, 1962.
- [8] B. G. Johnston (Ed.), *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures (3rd Ed.)*, Chap.3, 44-47, J. Wiley & Sons, 1976.
- [9] 中村恒善, 上谷宏二, 澤木英二, 弾塑性骨組の非対称分岐挙動, 第24回構造工学シンポジウム「構造の非線形問題」, 93-100, 1978